УДК 517.98

# Сферические функции на однополостном гиперболоиде, комплексные оболочки и формула Планшереля [1]

© В. Ф. Молчанов

*Ключевые слова*: однополостный гиперболоид, комплексные оболочки, сферические функции

Для однополостного гипербололида в трехмерном вещественном пространстве построены 4 комплексные оболочки, указаны сферические функции на гиперболоиде, которые могут быть продолжены аналитически на эти оболочки (каждой оболочке отвечают сферические функции какой-нибудь одной серии), найдены операторы проектирования на подпространства, в которых действуют представления какой-нибудь одной из серий, и написаны соответствующие ядра Коши-Сеге

Настоящая работа продолжает нашу работу [3] о сферических функциях и комплексных оболочках на однополостном гиперболоиде $\mathcal{X}$ в трехмерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^3$. В разложение квазирегулярного представления псевдо-ортогональной группы $G = \mathrm{SO}_0(1,2)$ на $\mathcal{X}$ входят неприводимые унитарные представления непрерывной серии с кратностью два и голоморфной и антиголоморфной дискретных серий с кратностью один. Само разложение эквивалентно разложению дельта-функции на $\mathcal{X}$ по сферическим функциям этих серий.

Мы строим четыре комплексные оболочки гиперболоида $\mathcal{X}$ и указываем сферические функции на гиперболоиде, которые могут быть продолжены аналитически на эти оболочки; каждой оболочке отвечают сферические функции какой-нибудь одной серии. Мы находим операторы проектирования на подпространства, в которых действуют представления какой-нибудь одной из серий, и пишем соответствующие ядра Коши-Сеге. В частности, это решает задачу характеризации серий с помощью комплексных оболочек (программа Гельфанда—Гиндикина).

Аналитическое продолжение сферических функций дискретных серий было получено в нашей работе [2].

## § 1. Однополостный гиперболоид и комплексные оболочки

[1]Работа поддержана Госзаданием Минобрнауки 1.3445.2011, ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" 14.740.11.0349

Введем в $\mathbb{R}^3$ билинейную форму

$$[x,y] = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. Пусть $\mathcal{X}$ – однополостный гиперболоид $[x,x] = 1$ в $\mathbb{R}^3$. Пусть $G = \mathrm{SO}_0(1,2)$ – связная группа линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^3$, сохраняющих форму $[x,y]$. Мы будем считать, что $G$ действует справа: $x \mapsto xg$, в соответствии с этим записываем вектор в виде строки. На гиперболоиде $\mathcal{X}$ группа $G$ действует транзитивно. Инвариантная мера есть $dx = |x_3|^{-1}\, dx_1\, dx_2$. Скалярное произведение в пространстве $L^2(\mathcal{X}, dx)$ по этой мере дается формулой

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{X}} = \int_{\mathcal{X}} f_1(x)\, \overline{f_2(x)}\, dx.$$

Стационарная подгруппа $H$ точки $x^0 = (0,0,1) \in \mathcal{X}$ состоит из матриц

$$h = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & 0 \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

она изоморфна $\mathrm{SO}_0(1,1)$. Следовательно, $\mathcal{X} = G/H$.

Приведем некоторый материал из [3] о комплексных оболочках гиперболоида $\mathcal{X}$.

Распространим билинейную форму $[x,\, y]$ на пространство $\mathbb{C}^3$ формулой (1.1). Уравнение $[x,\, x] = 1$ в $\mathbb{C}^3$ задает комплексный гиперболоид $\mathcal{X}^{\mathbb{C}}$. Комплексные оболочки $\Omega^{\pm}$, $\mathcal{Y}^{\pm}$ гиперболоида $\mathcal{X}$ – это следующие четыре комплексные подмногообразия в $\mathcal{X}^{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned}
\Omega^+ &: \quad -1 < [x,\, \overline{x}] < 1, \quad \operatorname{Im} x_1 > 0, \\
\Omega^- &: \quad -1 < [x,\, \overline{x}] < 1, \quad \operatorname{Im} x_1 < 0, \\
\mathcal{Y}^+ &: \quad [x,\, \overline{x}] > 1, \quad \operatorname{Im} \frac{x_3}{x_2} < 0, \\
\mathcal{Y}^- &: \quad [x,\, \overline{x}] > 1, \quad \operatorname{Im} \frac{x_3}{x_2} > 0,
\end{aligned}$$

Сопоставим каждой точке $x$ многообразий $\Omega^{\pm}$, $\mathcal{Y}^{\pm}$ ее третью координату $x_3$. Тогда образом многообразия $\Omega^{\pm}$ служит вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$, а образом многообразия $\mathcal{Y}^{\pm}$ – вся плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом $[-1, 1]$.

Пусть $F(\omega)$ и $G(y)$ – аналитические функции на $\Omega^{\pm}$ и $\mathcal{Y}^{\pm}$, зависящие только от третьей координаты: $F(\omega) = f(\omega_3)$ и $G(y) = g(y_3)$. Пусть точки $\omega \in \Omega^{\pm}$ и $y \in \mathcal{Y}^{\pm}$ стремятся к точке $x \in \mathcal{X}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\lim F(\omega) &= f(x_3 \pm i0 \cdot x_1 x_3), \\
\lim G(y) &= g(x_3 \mp i0 \cdot x_2).
\end{aligned}$$

## § 2. Представления группы $G = \mathrm{SO}_0(1,2)$

Напомним некоторый материал о представлениях $T_\sigma$ группы $G$, см., например, [4]. Мы используем компактную картину. Для многообразия $M$ через $\mathcal{D}(M)$ обозначается пространство функций класса $C^\infty$ со значениями в $\mathbb{C}$ на $M$ с компактным носителем и через $\mathcal{D}'(M)$ обозначается пространство обобщенных функций на $M$ – антилинейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(M)$.

Пусть $S$ – сечение конуса $[x,x]=0$ плоскостью $x_1=1$, это – окружность, состоящая из точек $s=(1,\sin\alpha,\cos\alpha)$, где $\alpha\in\mathbb{R}$. Эвклидова мера на $S$ есть $ds=d\alpha$. Представление $T_\sigma$, $\sigma\in\mathbb{C}$, группы $G$ действует в $\mathcal{D}(S)$ следующим образом:

$$\left(T_\sigma(g)f\right)(s) = f\left(\frac{sg}{(sg)_1}\right)(sg)_1^\sigma\,,$$

где $g\in G$, индекс 1 указывает первую координату. Если $\sigma$ – не целое, то $T_\sigma$ неприводимо и эквивалентно $T_{-\sigma-1}$. Возьмем в $\mathcal{D}(S)$ базис, состоящий из функций

$$\psi_m(s) = e^{im\alpha}, \quad m\in\mathbb{Z}.$$

Если $\sigma$ – целое, то подпространства $V_{\sigma,+}$ и $V_{\sigma,-}$, порождаемые функциями $\psi_m$ с $m\geqslant -\sigma$ и $m\leqslant\sigma$, соответственно, инвариантны.

Эрмитова форма

$$\langle\psi,\varphi\rangle_S = \int_S \psi(s)\,\overline{\varphi(s)}\,ds \tag{2.1}$$

инвариантна относительно пары $T_\sigma$, $T_{-\overline{\sigma}-1}$, то есть

$$\langle T_\sigma(g)\psi,\varphi\rangle_S = \langle\psi, T_{-\overline{\sigma}-1}(g^{-1})\varphi\rangle_S. \tag{2.2}$$

Имеется четыре серии неприводимых унитаризуемых представлений: непрерывная серия, состоящая из $T_\sigma$, $\sigma=-1/2+i\rho$, $\rho\in\mathbb{R}$, со скалярным произведением (2.1); дополнительная серия, состоящая из $T_\sigma$, $-1<\sigma<1$; и две дискретные серии – голоморфная и антиголоморфная: $T_n^+$ и $T_n^-$, $n\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$, соответственно; представление $T_n^\pm$ есть фактор-представление представления $T_n$, действующее в $\mathcal{D}(S)/V_{n,\mp}$, оно эквивалентно представлению $T_{-n-1}^\pm$, действующему в подпространстве $V_{-n-1,\pm}$.

Представление $T_\sigma$ распространяется на пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'(S)$ формулой (2.2), где $\langle\psi,\varphi\rangle_S$ означает значение обобщенной функции $\psi$ на основной функции $\varphi$.

## § 3. Сферические функции

Сначала укажем обобщенные функции $\theta$ в $\mathcal{D}'(S)$, инвариантные относительно $H$ в представлениях $T_\sigma$ и их подфакторах, см., например, [4]. Мы используем стандартные обозначения для обобщенных функций на прямой: $t_\pm^\sigma$, $(t\pm i0)^\sigma$, а также

$$t^{\sigma,\varepsilon} = |t|^\sigma \operatorname{sgn}^\varepsilon t = t_+^\sigma + (-1)^\varepsilon\, t_-^\sigma\,,$$

где $\sigma\in\mathbb{C}$, $\varepsilon\in\mathbb{Z}$, фактически эта функция зависит только от $\varepsilon$ по модулю два, так что можно брать $\varepsilon = 0, 1$.

Пространство $H$-инвариантов для $T_\sigma$ имеет размерность 2 для $\sigma\neq -n-1$ и размерность 3 для $\sigma = -n-1$ (здесь $n\in\mathbb{N}$).

Для $\sigma\notin\mathbb{Z}$ возьмем базис

$$\begin{aligned}\theta_{\sigma,\pm}(s) &= (s_3\pm i0)^\sigma\\ &= ([x^0,s]\pm i0)^\sigma.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Всякий неприводимый подфактор имеет $H$-инвариант, единственный с точностью до множителя. В частности, для $T_{-n-1}^\pm$ инвариантом является

$$\theta_{-n-1}^\pm(s) = (s_3\mp i0\cdot s_2)^{-n-1}. \tag{3.2}$$

Для $\sigma\notin\mathbb{Z}$ мы определяем 4 сферические функции $\Phi_{\sigma,\pm,\pm}(x)$, знаки берутся в произвольных сочетаниях, а для $\sigma = n\in\mathbb{N}$ мы определяем 2 сферические функции $\Psi_{n,\pm}(x)$. Эти функции оказываются локально интегрируемыми функциями на $\mathcal{X}$, инвариантными относительно $H$. А именно, мы полагаем

$$\begin{aligned}\Phi_{\sigma,\pm,\pm}(x) &= \langle\theta_{-\sigma-1,\pm}\,, T_{\overline{\sigma}}\,(g^{-1})\,\theta_{\overline{\sigma},\pm}\rangle_S\,,\\ \Psi_{n,\pm}(x) &= \langle\theta_{-n-1}^\pm\,, T_n\,(g^{-1})\,\theta_{n,n+1}\rangle_S\,,\end{aligned}$$

где $g$ – такой элемент из $G$, что $x^0 g = x$. Подставляя (3.1) и (3.2), получим

$$\begin{aligned}\Phi_{\sigma,\pm,\pm}(x) &= \int_S (s_3\pm i0)^{-\sigma-1}([x,s]\mp i0)^\sigma\,ds,\\ \Psi_{n,\pm}(x) &= \int_S (s_3\pm i0\cdot s_2)^{-n-1}\,[x,s]^{n,n+1}\,ds.\end{aligned}$$

Эти функции выражаются через функции Лежандра $P_\sigma(\pm x_3)$ и $Q_n(x_3)$. Функции Лежандра $P_\nu(z)$ и $Q_\nu(z)$ определены в плоскости комплексного переменного $z$ с разрезами $[-1,1]$ и $(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$, соответственно, см. [1]. На разрезах мы определяем эти функции как полусумму предельных значений сверху и снизу.

Введем следующие функции на $\mathcal{X}$:

$$A_{\sigma,\pm}(x) = \begin{cases} P_\sigma(x_3), \quad x_3 > -1,\\ P_\sigma(x_3)\mp i\sin\sigma\pi\cdot\operatorname{sgn}x_1\cdot P_\sigma(-x_3), x_3<-1,\end{cases} \tag{3.3}$$

$$B_{\sigma,\pm}(x) = \begin{cases} P_\sigma(-x_3)\mp i\sin\sigma\pi\cdot\operatorname{sgn}x_1\cdot P_\sigma(x_3), \quad x_3>1,\\ P_\sigma(-x_3), \quad x_3<1,\end{cases} \tag{3.4}$$

$$C_{n,\pm}(x) = \begin{cases} Q_n(x_3), \quad |x_3|>1,\\ Q_n(x_3)\pm(i\pi/2)\cdot\operatorname{sgn}x_2\cdot P_n(x_3), \quad |x_3|<1,\end{cases} \tag{3.5}$$

Эти функции являются предельными значениями на $\mathcal{X}$ аналитических функций на $\Omega^{\pm}$, $\mathcal{Y}^{\pm}$, а именно,

$$\begin{aligned}
A_{\sigma,\pm}(x) &= \lim P_{\sigma}(\omega_3),\ \omega \in \Omega^{\pm},\ \omega \to x, \\
B_{\sigma,\pm}(x) &= \lim P_{\sigma}(-\omega_3),\ \omega \in \Omega^{\pm},\ \omega \to x, \\
C_{n,\pm}(x) &= \lim Q_{n}(y_3),\ y \in \mathcal{Y}^{\pm},\ y \to x.
\end{aligned}$$

Сферические функции выражаются через функции (3.3), (3.4), (3.5) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\sigma,\mp,\pm}(x) &= \pm 2\pi i \cdot A_{\sigma,\pm}(x), \\
\Phi_{\sigma,\pm,\pm}(x) &= \mp 2\pi i \cdot e^{\mp i\sigma\pi}\, B_{\sigma,\pm}(x), \\
\Psi_{n,\pm}(x) &= 4\, C_{n,\pm}(x),
\end{aligned}$$

в этих формулах берутся либо верхние, либо нижние знаки "$\pm$".

Из (3.3), (3.4), (3.5) получаем, что функции Лежандра $P_{\sigma}(\pm x_3)$, $Q_n(x_3)$ – полусуммы функций $A$, $B$, $C$:

$$\begin{aligned}
P_{\sigma}(x_3) &= \frac{1}{2}\sum_{\pm} A_{\sigma,\pm}(x), \\
P_{\sigma}(-x_3) &= \frac{1}{2}\sum_{\pm} B_{\sigma,\pm}(x), && (3.6) \\
Q_{n}(x_3) &= \frac{1}{2}\sum_{\pm} C_{\sigma,\pm}(x). && (3.7)
\end{aligned}$$

## § 4. Формула Планшереля

В разложение квазирегулярного представления на однополостном гиперболоиде $\mathcal{X}$ входят представления непрерывной серии с кратностью два и обеих дискретных серий (голоморфной и антиголоморфной) с кратностью один.

Обозначим через $\delta(x)$ дельта-функцию на $\mathcal{X}$, сосредоточенную в точке $x^0$:

$$\langle \delta, f\rangle_{\mathcal{X}} = \overline{f(x^0)}$$

Формула Планшереля для $\mathcal{X}$ равносильна разложению этой дельта-функции по сферическим функциям, см., [4]. Отметим, что в [4] мы использовали другой базис для сферических функций непрерывной серии. Запишем формулу Планшереля из [4], заменяя сферические функции их выражениями через функции Лежандра:

$$\delta(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho \operatorname{sh} \rho\pi}{(\operatorname{ch} \rho\pi)^2}\, P_{\sigma}(-x_3)\, d\rho + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, Q_n(x_3),$$

где $\sigma = -(1/2) + i\rho$.

Заменим здесь функции Лежандра их выражениями через $B_{\sigma,\pm}(x)$ и $C_{\sigma,\pm}(x)$, см., (3.6) и (3.7). Мы получим разложение дельта-функции в сумму четырех обобщенных функций:

$$\delta(x) = E_c^+(x) + E_c^-(x) + E_d^+(x) + E_d^-(x), \tag{4.1}$$

где

$$\begin{aligned} E_c^{\pm}(x) &= \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho\,\mathrm{sh}\,\rho\pi}{(\mathrm{ch}\,\rho\pi)^2}\, P_\sigma(-x_3)\,d\rho,\ \ \sigma = -(1/2) + i\rho, \\ E_d^{\pm}(x) &= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,Q_n(x_3). \end{aligned}$$

Разложение (4.1) отвечает разложению пространства $L^2(\mathcal{X}, dx)$ на подпространства, в которых действуют отдельные серии представлений:

$$L^2(\mathcal{X}, dx) = H_c^+ + H_c^- + H_d^+ + H_d^-, \tag{4.2}$$

– непрерывная, непрерывная, голоморфная дискретная, антиголоморфная дискретная, соответственно.

Удается вычислить явно обобщенные функции из (4.1), а именно,

$$E_c^{\pm} = \frac{1}{4}\,\delta - \frac{1}{4\pi}\,(x_3-1)^{-1} \pm \frac{i}{4\pi}\,(Z^+ + Z^-), \tag{4.3}$$

$$E_d^{\pm} = \frac{1}{4}\,\delta + \frac{1}{4\pi}\,(x_3-1)^{-1} \pm \frac{i}{4\pi}\,(Z^+ - Z^-), \tag{4.4}$$

где $Z^{\pm}$ – следующие обобщенные функции на $\mathcal{X}$:

$$\langle Z^{\pm}, f\rangle_{\mathcal{X}} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t, \pm t, 1)}\,\frac{dt}{t}\,, \quad f \in \mathcal{D}(\mathcal{X}).$$

Это – интегралы по прямолинейным образующим на $\mathcal{X}$, проходящим через $x^0$, по мере, инвариантной относительно подгруппы $H$.

Обобщенные функции из (4.1) являются предельными значениями функций на комплексных оболочках:

$$E_c^{\pm}(x) = \lim \frac{1}{4\pi^2}\,(1-\omega_3)^{-1} \tag{4.5}$$

$$E_d^{\pm}(x) = \lim \frac{1}{4\pi^2}\,(y_3-1)^{-1}\,, \tag{4.6}$$

пределы берутся при $\omega \to x$, $\omega \in \Omega^{\pm}$, и при $y \to x$, $y \in \mathcal{Y}^{\pm}$, соответственно. Предельные соотношения (4.5), (4.6) понимаются в следующем смысле. Сначала мы продолжаем на $\mathcal{X}$ с комплексных оболочек такие же функции с показателем $\lambda$ вместо $-1$, а затем полагаем $\lambda = -1$:

$$\begin{aligned} E_c^{\pm}(x) &= \left[\lim \frac{1}{4\pi^2}\,(1-\omega_3)^{\lambda}\right]_{\lambda=-1} \\ E_d^{\pm}(x) &= \left[\lim \frac{1}{4\pi^2}\,(y_3-1)^{\lambda}\right]_{\lambda=-1}. \end{aligned}$$

## § 5. Проекторы на серии, ядра Коши–Сеге

Обозначим через $\Pi_c^\pm, \Pi_d^\pm$ операторы в $L^2(\mathcal{X}, dx)$, проектирующие на подпространства $H_c^\pm$, $H_d^\pm$, соответственно. Их явные выражения получаются из (4.3), (4.4) с помощью сдвига. А именно, для $f \in \mathcal{D}(\mathcal{X})$ мы имеем

$$\begin{aligned}
\left(\Pi_c^\pm f\right)(x) &= \frac{1}{4}\, f(x) - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{X}} ([x,u]-1)^{-1}\, f(u)\, du \\
&\pm \frac{i}{4\pi} \left[(W^+ f)(x) + (W^- f)(x)\right], \\
\left(\Pi_d^\pm f\right)(x) &= \frac{1}{4}\, f(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{X}} ([x,u]-1)^{-1}\, f(u)\, du \\
&\pm \frac{i}{4\pi} \left[(W^+ f)(x) - (W^- f)(x)\right],
\end{aligned}$$

где $W^\pm$ – следующие операторы:

$$\left(W^\pm f\right)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + t \cdot e_x^\pm)\, \frac{dt}{t},$$

векторы $e_x^\pm \in S$ получаются из векторов $(1, \pm 1, 0)$ сдвигом на элемент $g \in G$ такой, что $x = x^0 g$, а именно,

$$e_x^\pm = \left(1,\ \frac{x_1 x_2 \mp x_3}{x_1^2 + 1},\ \frac{x_1 x_3 \pm x_2}{x_1^2 + 1}\right).$$

Значение операторов $W^\pm$ от функции $f$ в точке $x$ – это интегралы от функции $f$ по прямолинейным образующим на $\mathcal{X}$, проходящим через $x$, по мере, инвариантной относительно стационарной подгруппы точки $x$.

Отметим любопытное обстоятельство: разности $\Pi_c^+ - \Pi_c^-$ и $\Pi_d^+ - \Pi_d^-$ операторов проектирования выражаются только через операторы $W^\pm$:

$$\begin{aligned}
\Pi_c^+ - \Pi_c^- &= \frac{i}{2\pi} \left(W^+ + W^-\right), \\
\Pi_d^+ - \Pi_d^- &= \frac{i}{2\pi} \left(W^+ - W^-\right).
\end{aligned}$$

Подпространства (4.2) являются собственными для этих разностей с собственными значениями $1, -1, 0, 0$ и $0, 0, 1, -1$, соответственно.

Наконец, из (4.5) и (4.6) с помощью сдвига мы получаем ядра Коши–Сеге, отвечающие подпространствам $H_c^\pm$ и $H_d^\pm$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_c^\pm(\omega, x) &= \frac{1}{4\pi^2}\, (1 - [\omega, x])^{-1}, \quad \omega \in \Omega^\pm,\ x \in \mathcal{X}, \\
\mathcal{E}_d^\pm(y, x) &= \frac{1}{4\pi^2}\, ([y, x] - 1)^{-1}, \quad y \in \mathcal{Y}^\pm,\ x \in \mathcal{X}.
\end{aligned}$$

## Литература

1. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1965.

2. В. Ф. Молчанов. Квантование на мнимой плоскости Лобачевского. Функц. анализ и его прил., 1980, том 14, вып. 2. 73–74.

3. В. Ф. Молчанов. Аналитическое продолжение сферических функций непрерывной серии для однополостного гиперболоида. Вестник Тамбовского унив. Серия: Естественные и технические науки, 2008, том 13, вып. 6, 586–597.

4. V. F. Molchanov. Canonical and boundary representations on a hyperboloid of one sheet. Acta Appl. Math., 2004, vol. 81, Nos. 1–3, 191–204.


*Поступила в редакцию 16 ноября 2012 года*

V. F. Molchanov. Spherical functions on the hyperboloid of one sheet, complex hulls and Plancherel fofmula

For the hyperboloid of one sheet in the three-dimensional real space, we construct 4 complex hulls, determine spherical functions on the hyperboloid that can be continued analytically on these hulls (there is a correspondence between hulls and series of spherical functions), find projectors on subspaces where representations of separate series act, and write corresponding Cauchy–Szego kernels

*Keywords*: hyperboloid of one sheet, complex hulls, spherical functions